К.Ф. Самохвалов

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАК РИТОРИКЕ

В статье рассматриваеся так называемая «внутренняя риторика». Автор предлаегает простой анализ математической практики в терминах такой риторики. Схематически намечено, каким образом в математике возникают априорные высказывания.

This article considers the so-called 'inner rhetoric'. The author offers a very simple analysis of mathematical practice in terms of such rhetoric. It is shown schematically how synthetic a priori propositions emerge in mathematics.

Ключевые слова: *философия математики, математическая задача, «внутренняя риторика», априорно-аналитические и априорно-синтетические утверждения в математике.*

Keywords: *philosophy of mathematics, mathematical problem, "inner rhetoric", analytical and synthetic a priori propositions in mathematics.*

Как бы ни выглядела математическая деятельность со стороны, действующему-то математику она представляется внутренним диалогом с собой с целью *убедить в чём-то самого себя*. В этом качестве математическая деятельность может, конечно, считаться своеобразной, назовём её *внутренней*, риторикой.

Цель сообщения — схематически, опуская сугубо математические малознакомые детали, показать, что характер приёмов этой внутренней риторики приводит к появлению в математике априорно-синтетических утверждений.

1. Итак, математик воспринимает свою деятельность как поток попыток убедить себя то в одном, то в другом. Попросту говоря, математик постоянно осознаёт и решает какие-то возникающие перед ним задачи. Ничего другого он не делает. А если и делает, то не в качестве математика.

Поэтому необходимо несколько слов сказать о том, что такое задача.

Конечно, никто не сомневается в том, что уже просто *понимание* (не решение) любой математической задачи предполагает наличие определённых знаний у того, кто понимает.

И здесь важно подчеркнуть, что такого рода знаниям, — знаниям, предполагаемым при понимании любой задачи, — можно дать математически точное описание.

Предъявить это описание в полном виде (см., например, [1, с. 13-18]) здесь неуместно, ибо это значило бы выйти за пределы школьной математики. Однако кое-что об этом опущенном мною описании я всё же должен сказать.

Предварительно замечу, что среди всех непротиворечивых теорий в любом языке, объемлющем язык арифметики, можно выделить некоторый специальный подкласс тех из них, к которым не применима печально знаменитая (кто только её не склоняет!) вторая теорема Гёделя о неполноте. Теории, принадлежащие этому подклассу, назовём *слабыми*.

Так вот, если математик сумел *сформулировать* (*поставить*) некую задачу φ, *понятную ему* (*осмысленную для него*), то, как оказывается, в результате этой формулировки он будет располагать некоторой слабой теорией S_φ такой, что каждая теорема из S_φ — вклад в смысл (в понимание) задачи φ, а любое решение задачи φ, *если оно есть*, может быть найдено в рамках этой слабой теории.

Стоит подчеркнуть, что при этом каждая теорема τ теории S_φ воспринимается математиком в качестве априорно истинного утверждения, так как τ — часть смысла задачи φ, и, следовательно, сомневаться в τ означало бы сомневаться в смысле задачи, а значит, и в самой задаче. Между тем, сама по себе задача не бывает ни ложной, ни истинной, она бывает лишь интересной или не интересной, разрешимой или не разрешимой, трудной или лёгкой, и т.д. и т.п.

Таким образом, математик, если он имеет дело с отдельной *понятной ему* задачей φ, всегда располагает бесконечным множеством априорных утверждений, — множеством теорем теории S_φ, — в своей совокупности достаточных для того, чтобы справится с задачей.

Поэтому, имея дело с отдельной задачей, математик считает совершено излишним подразделять априорное знание, приобретённое им в ходе осмысления своей задачи, на какие-то части. В частности, ему нет дела и до разграничения аналитическое – синтетическое.

Ему важно лишь одно — его знание априорно (в нём нельзя сомневаться) и достаточное, чтобы справится с задачей.

2. Но тогда как же вообще возникает среди математиков интерес к этому разграничению? А что он возникает, об этом ярко свидетельствует, например, знаменитый и неразрешённый спор между Пуанкаре и Расселом по поводу схемы аксиом индукции в арифметике. Как известно, Пуанкаре считал схему индукции ярким примером синтетического знания *a priori*, а Рассел решительно возражал.

В чём тут дело?

А дело в том, что математик редко работает по такому сценарию, когда ему надо решить только одну задачу, скажем φ. Обычно его интересует не отдельная задача, а то, что обычно называется *проблемой*, — т.е. его интересует сразу какое-то неединичное *множество* Φ задач.

Иными словами, обычно речь идёт о таком сценарии, когда работа математика начинается не с выбора какой-то одной задачи, а с выбора пары (Φ, U), где Φ — какое-то множество задач, а U — излюбленная математиком теория, например, теория множеств.

Выбор множества Φ отражает наличные *интересы* математика, выбор U — наличные *средства* к удовлетворению этих интересов. Причём предполагается, что, вообще говоря, эти выборы первоначально осуществлены независимо друг от друга и без каких-либо дополнительных предварительных ограничений на Φ и U.

Естественно, что в таких обстоятельствах у математика появляется резон спросить себя, в какой степени средства, которыми он располагает, отвечают целям, которые его интересуют.

Стало быть, для него небезразличен вопрос: годится ли теория U для постановки и решения *каждой* или *хотя бы одной* задачи из множества Φ? Если теория U годится для постановки (а значит и решения, если оно есть) хотя бы одной задачи из множества Φ, назовём её Φ-*полезной*, а если для всех задач, то — Φ-*адекватной*.

Познакомимся с рассматриваемым сценарием поближе.

Чтобы излишне не усложнять рассуждения, предположим, что математика интересуют всего две задачи $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$, т.е. предположим, что $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\}$.

Пусть A_Φ — объединение множеств теорем обеих теорий $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ и $S_{\boldsymbol{\psi}}$: $A_\Phi = S_{\boldsymbol{\varphi}} \cup S_{\boldsymbol{\psi}}$.

Каждый элемент *a* множества A_Φ — предложение, задающее или часть смысла задачи $\boldsymbol{\varphi}$, или часть смысла задачи $\boldsymbol{\psi}$, или общую часть смыслов обеих задач. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, назовём предложение *a априорным относительно множества Φ задач* (*относительно проблемы* Φ).

Соответственно, само множество $A_Ф$ естественно назвать *априорным знанием относительно Ф*.

Замечу, что априорное знание $A_Ф$, вообще говоря, не является теорией, т.е. не является обязательно замкнутым относительно дедукции.

Замечу также, что $A_Ф$ может быть даже противоречивым множеством предложений, не будучи при этом противоречивой теорией.

Пусть теперь $An_Ф$ — пересечение множеств теорем обеих теорий $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ и $S_{\boldsymbol{\psi}}$: $An_Ф = S_{\boldsymbol{\varphi}} \cap S_{\boldsymbol{\psi}}$.

Каждый элемент *b* множества $An_Ф$ — предложение, задающее общую часть смыслов и задачи **φ,** и задачи **ψ**. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, назовём предложение *b априорным аналитическим относительно множества Ф задач* (*относительно проблемы* Ф).

Соответственно, само множество $An_Ф$ естественно назвать *аналитической компонентой априорного знания относительно Ф*.

Аналитическая компонента априорного знания относительно Ф всегда является теорией.

Наконец, пусть $Syn_Ф$ — разность множеств $A_Ф$ и $An_Ф$: $Syn_Ф = A_Ф - An_Ф$.

Каждый элемент *c* множества $Syn_Ф$ — предложение, являющееся априорным, но не аналитически априорным относительно множества Ф задач (относительно проблемы Ф). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, назовём предложение *c априорным синтетическим относительно множества Ф задач* (*относительно проблемы* Ф).

Соответственно, само множество $Syn_Ф$ естественно назвать *синтетической компонентой априорного знания относительно Ф*.

Для этой компоненты справедливы те же замечания, что и для $A_Ф$.

3. Напомню, что мы рассматриваем сценарий, когда математик начинает работу с выбора не только проблемы (множества задач) Φ, но ещё и с излюбленной им теории U.

В связи с этим нам нужно определить не только априорно аналитические и априорно синтетические компоненты *знания* относительно Φ, но и соответствующие компоненты UAn_{Φ} и $UAsyn_{\Phi}$ произвольной (излюбленной) *теории* U.

Путь для этого очевиден:

$UAn_{\Phi} = U \cap An_{\Phi}$;

$UAsyn_{\Phi} = U \cap Asyn_{\Phi}$.

UAn_{Φ} назовем Φ-*априорно аналитической*, а $UAsyn_{\Phi}$ — Φ-*априорно синтетической компонентой теории* U.

Легко понять, что для одной и той же теории U и различных множеств задач Φ1 и Φ2, если Φ1 ⊂ Φ, то $2UAsyn_{\Phi 1} \subset UAsyn_{\Phi 2}$.. Откуда следует, что упомянутый неразрешённый спор между Пуанкаре и Расселом легко разрешить: достаточно предположить, что Рассел ориентировал арифметику на более узкий класс задач, чем Пуанкаре.

Предположим, что проблема $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\}$ выбрана так, что $S_{\varphi} \neq S_{\psi}$. Тогда легко видеть, что теория U является Φ-адекватной, только если $UAsyn_{\Phi} \neq \varnothing$. Если же проблема Φ выбрана так, что $S_{\varphi} = S_{\psi}$, то тогда $UAsyn_{\Phi} = \varnothing$ и тем не менее U может быть Φ-адекватной.

Проблему $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\}$ назовём *неоднородной*, если $S_{\varphi} \neq S_{\psi}$.

Тогда для любой пары (Φ, U), если проблема Φ неоднородна, а Φ-априорно синтетическая компонента теории U пуста, то теория U не является Φ-адекватной.

С другой стороны, теория U заведомо Φ-адекватна, если она противоречива.

Вот теперь мы имеем ясный мотив, для попыток выяснения, пуста или не пуста Φ-априорно синтетическая компонента теории U, коль скоро уже как-то выбрана пара (Ф, U) такая, что проблема Ф является неоднородной.

Разумеется, всё сказанное тривиально обобщается на проблемы, состоящие из произвольного множества Ф задач. В частности, всё сказанное распространяется на проблему ФL, состоящую из множества всех осмысленных задач в произвольно заданном языке L. В последнем случае множества $UAn_{ФL}$, и $UAsyn_{ФL}$ называются просто *априорной аналитической* и *априорно синтетической компонентами теории* U *в* L.

Стоит подчеркнуть, что любая противоречивая теория в языке L, объемлющем язык арифметики заведомо является ФL-адекватной. Выводы насчёт значимости вопроса о непротиворечивости излюбленных математиками теорий оставляю на усмотрение читателя.

В заключение замечу, что полное изложение опущенных математических и философских деталей читатель найдёт в книжке [1], пронизанной идеей, принадлежащей Ю.Л. Ершову, так называемого «задачного подхода».

Список литературы

1. *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Современная философия математики: недомогания и лечение. — Новосибирск: «Параллель», 2007. — 143 с.

Об авторе

Самохвалов Климентий Фёдорович – доктор философских наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск, kfsamochvalov@mail.ru.

About author

Prof. Klimenty F. Samokhvalov, Leading Research Fellow, Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, kfsamochvalov@mail.ru.